

7.4. Чёрная дыра – это область пространства, гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть её не могут даже кванты света. По одной из моделей, радиус черной дыры задается формулой:

$$R_g = \frac{2G}{c^2} M,$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{с}^{-2} \text{кг}^{-1}$ – гравитационная постоянная, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света в вакууме, M – масса черной дыры. Объем шара: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Определите, во сколько раз средняя плотность $\rho_{\text{ср}}$ вещества внутри сверхмассивной черной дыры Лебедь А, масса которой в 1 миллиард раз больше массы Солнца, отличается от плотности жидкой воды $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3$? Масса Солнца $M_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$.

Решение.

Рассмотрим черную дыру как шар радиуса R_g . Тогда ее средняя плотность равна:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R_g^3} = \frac{3M}{4\pi \left(\frac{c^2}{2GM} \right)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \cdot \frac{1}{M^2} = \frac{\alpha}{M^2}, \quad (1)$$

где $\alpha \approx 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3$ – размерная константа.

Найдем массу черной дыры Лебедь А:

$$M = 10^9 \cdot M_{\text{С}} = 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 2 \cdot 10^{39} \text{ кг}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\rho_{\text{ср}} = 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3 / (2 \cdot 10^{39} \text{ кг})^2 \approx 18,3 \text{ кг/м}^3. \quad (3)$$

Следовательно, плотность воды *больше* средней плотности черной дыры в $1000 \text{ кг/м}^3 / 18,3 \text{ кг/м}^3 \approx 54,8$ раза.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Получена зависимость (1) для средней плотности черной дыры от её массы	2
2	Явно или неявно вычислен размерный коэффициент $\alpha \approx 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3$	3
3	Найдена масса черной дыры $2 \cdot 10^{39} \text{ кг}$	1
4	Найдено числовое значение для плотности черной дыры $18,3 \text{ кг/м}^3$. Допустимы значения порядка 18-20 кг/м^3 .	2
5	Получен вывод, что плотность воды больше средней плотности сверхмассивных черных дыр	1
6	Получено численное значение отношения 54,8 (допустимо 50-60).	1
	Сумма	10